

CONTROL N°3

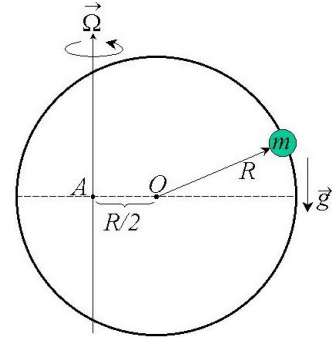
17 de noviembre de 2004
Tiempo: 2:30 horas

Problema 1

Un aro circular vertical de radio R y centro O gira en torno a un eje vertical que pasa por A , ubicado a una distancia $R/2$ de O . Por el aro puede deslizarse sin roce una partícula de masa m , la cual es soltada con velocidad nula relativa al aro, desde su punto más alto.

Se pide:

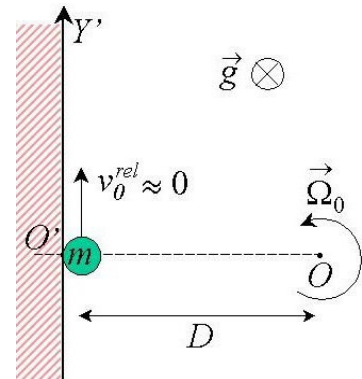
- La velocidad y aceleración de la partícula relativa al aro
- La reacción que le ejerce el aro a la partícula
- Una expresión que permita determinar la distancia que recorre la partícula sobre el aro entre su posición inicial y la posición en que se detiene por primera vez respecto del aro.



Problema 2

Una partícula de masa m se mueve sin roce por el borde de un muro ubicado en el eje Y' . El muro y la partícula están sobre una plataforma horizontal que rota con velocidad angular $\Omega_0 \hat{k}$ (Ω_0 constante positiva) con respecto a un punto fijo O ubicado a una distancia D de O' . Si la partícula inicia su movimiento en O' con una velocidad relativa muy pequeña en el sentido $+\hat{j}'$, se pide:

- Mostrar que mientras la partícula se mantiene en contacto con el muro, su rapidez relativa es proporcional a su distancia a O' .
- Determinar el punto en que la partícula se separa del muro.
- Indique cómo cambia (o no cambia) la respuesta de (b) si la velocidad inicial es en la dirección $-\hat{j}'$. Nota: Puede responder esta parte en forma cuantitativa o en forma cualitativa, en cuyo caso debe explicar claramente su argumento físico.

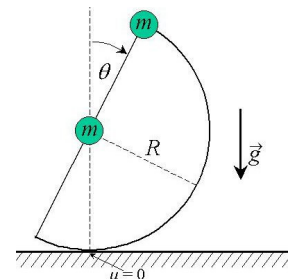


Problema 3

Un alambre de masa despreciable, semi-circular, cerrado y de radio R tiene fijadas dos partículas de masa m ubicadas en la parte superior y central de su diámetro, como se indica en la figura. El sistema está en un plano vertical, posado sobre una superficie horizontal con la cual el roce es despreciable.

Si se suelta desde el reposo cuando la parte recta del alambre forma un ángulo $\theta_0 = \pi/3$ con la vertical, determine:

- La velocidad angular del sistema en función de θ
- La aceleración angular del sistema y la reacción que ejerce el piso sobre el sistema.



(P3)

Para el sistema $EMT = cte$

$$EMT = \frac{1}{2} M \dot{Y}_G^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 + Mg Y_G$$

donde $M = 2m$

$$I_G = 2m \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{MR^2}{4}$$

No hay fzas externas horizontales $\Rightarrow \ddot{X}_G = 0 \Rightarrow \dot{X}_G = cte$

Sabemos que $N_G(0) = 0 \Rightarrow \dot{X}_G = 0 \forall t \Rightarrow N_G = \dot{Y}_G$

El CM. está ubicado en el pto medio entre las 2 partículas

$$\Rightarrow Y_G = R + \frac{R}{2} \cos \theta \Rightarrow \dot{Y}_G = -\frac{R}{2} \sin \theta \dot{\theta}$$

Inicialmente: $\theta_0 = \pi/6$ y se suelta desde el reposo \Rightarrow

$$EMT = MgR \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4} MgR.$$

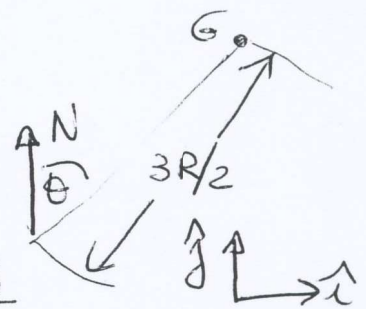
$$\therefore \frac{5}{4} MgR = \frac{1}{2} M \left[\frac{R}{2} \sin \theta \dot{\theta}\right]^2 + \frac{1}{2} \frac{MR^2}{4} \dot{\theta}^2 + MgR \left(1 + \frac{1}{2} \cos \theta\right)$$

$$\text{de donde: } \dot{\theta}^2 = \frac{2g(1 - 2\cos \theta)}{R(\sin^2 \theta + 1)}$$

$$b) \vec{\tau}_G = I_G \ddot{\theta}$$

$$\text{donde: } \vec{\tau}_G = \frac{3R}{2} (-\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j}) \times N \hat{j}$$

$$\vec{\tau}_G = -\frac{3R}{2} N \cos \theta \hat{k} \Rightarrow N = \frac{-2 I_G \ddot{\theta}}{3R \cos \theta}$$



$$I_G = \frac{MR^2}{4}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} \hat{k}$$

$$\Rightarrow N = \frac{-2}{3R \cos \theta} \cdot \frac{MR^2}{4} \cdot \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}$$

$$\text{donde: } \frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} = \frac{2g}{R} \left[\frac{2\sin \theta (\sin^2 \theta + 1) - 2\sin \theta \cos \theta (1 - 2\cos \theta)}{(\sin^2 \theta + 1)^2} \right]$$

P1

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{N}$$

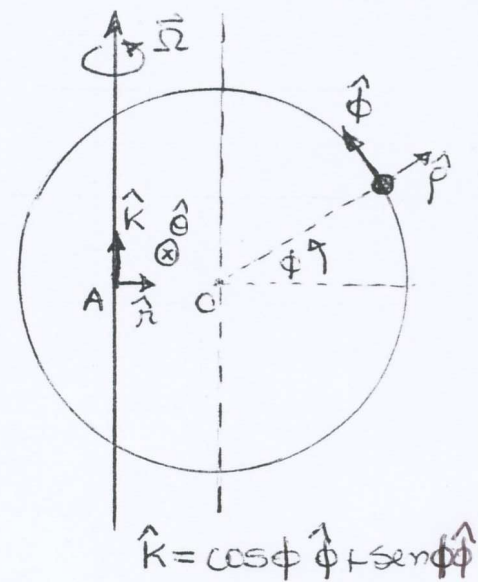
$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}^{rel} + 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}^{rel} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}^{rel})$$

$$\vec{a}_0 = -\frac{\Omega^2 R}{2} \hat{n} = -\frac{\Omega^2 R}{2} (\cos\phi \hat{r} - \sin\phi \hat{\phi})$$

$$\vec{a}^{rel} = -R\dot{\phi}^2 \hat{r} + R\ddot{\phi} \hat{\phi}$$

$$\vec{\Omega} = \Omega \hat{k} = \Omega (\cos\phi \hat{\phi} + \sin\phi \hat{r})$$

$$\vec{v}^{rel} = R\dot{\phi} \hat{\phi}$$



$$\vec{\Omega} \times \vec{v}^{rel} = -\Omega R \dot{\phi} \sin\phi \hat{\theta}$$

$$\vec{\Omega} \times \vec{v}^{rel} = \Omega R \cos\phi \hat{\theta} \Rightarrow \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}^{rel}) = \Omega^2 R [\cos^2\phi (-\hat{r}) + \sin\phi \cos\phi \hat{\phi}]$$

Ec. del movimiento

$$\vec{F} = m\vec{a} = -mg(\cos\phi \hat{\phi} + \sin\phi \hat{r}) + N_r \hat{r} + N_\theta \hat{\theta}$$

Ecuaciones escalares del movimiento:

$$N_r - mg \sin\phi = m \left[-\frac{\Omega^2 R}{2} \cos\phi - R\dot{\phi}^2 - \Omega^2 R \cos^2\phi \right] \quad (1)$$

$$-mg \cos\phi = m \left[\frac{\Omega^2 R}{2} \sin\phi + R\ddot{\phi} + \Omega^2 R \sin\phi \cos\phi \right] \quad (2)$$

$$N_\theta = -2m\Omega R \dot{\phi} \sin\phi \hat{\theta} \quad (3)$$

$$\text{de (2)} \quad \ddot{\phi} = -\frac{g}{R} \cos\phi - \frac{\Omega^2}{2} \sin\phi - \Omega^2 \sin\phi \cos\phi$$

$$\dot{\phi} = \dot{\phi} \frac{d\phi}{d\phi} \Rightarrow \dot{\phi}^2 = -\frac{2g}{R} [\sin\phi - \sin\phi_0] + \Omega^2 [\cos\phi - \cos\phi_0] + \Omega^2 [\cos^2\phi - \cos^2\phi_0]$$

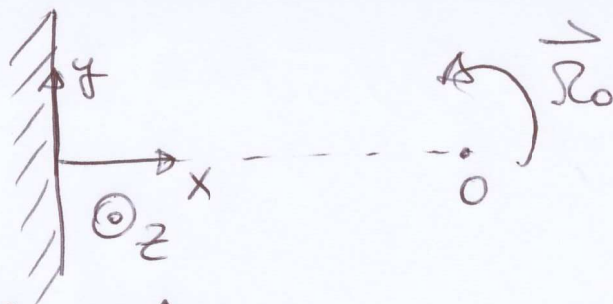
c) Si inicialmente la partícula se ubica en la parte más alta del aro $\Rightarrow \phi_0 = \pi/2$

$$\Rightarrow \dot{\phi}^2 = -\frac{2g}{R} (\sin\phi - 1) + \Omega^2 \cos\phi + \Omega^2 \cos^2\phi$$

$$\text{Se detiene} \Rightarrow \dot{\phi} = 0 \Rightarrow -\frac{2g}{R} (\sin\phi - 1) + \Omega^2 \cos\phi (1 + \cos\phi) = 0 \quad / \cdot \frac{1}{\cos\phi}$$

y reemplazando $\frac{1}{\cos\phi} = 1 + \tan\phi$, queda una ecuación en $\tan\phi$.

P2



$$\vec{F} = N_z \hat{k} - mg \hat{k} + N_x \hat{i}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_{rel} + 2\vec{\Omega} \times \vec{r}_{rel} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{rel} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{rel})$$

$$\vec{\Omega} = \Omega_0 \hat{k}$$

$$\vec{a}_0 = \Omega_0^2 D \hat{i}$$

$$\vec{a}_{rel} = \ddot{y} \hat{j}$$

$$\vec{r}_{rel} = y \hat{j}$$

$$\vec{r}_{rel} = y \hat{j}$$

$$N_z \hat{k} - mg \hat{k} + N_x \hat{i} = m [\Omega_0^2 D \hat{i} + \ddot{y} \hat{j} - 2\Omega_0 \dot{y} \hat{i} - \Omega_0^2 y \hat{j}]$$

En forma escalar: $N_x = m (\Omega_0^2 D - 2\Omega_0 \dot{y})$ (1)

$N_z - mg = 0$ (2)

$0 = m(\ddot{y} - \Omega_0^2 y)$ (3)

$$(3) \Rightarrow \dot{y} dy = \Omega_0^2 y dy \Rightarrow \frac{\dot{y}^2}{2} - \frac{\dot{y}^2}{2} = \Omega_0^2 \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right) \Rightarrow \boxed{\ddot{y} = \Omega_0^2 y}$$

b) Se separa del muro cuando $N_x = 0$ (en $y = y_s$)

Imponemos $N_x = 0$ en (1) $\Rightarrow \Omega_0^2 D = 2\Omega_0 \dot{y} \big|_{y_s}$; reemplazando \dot{y} de (*)

$\Rightarrow \Omega_0^2 D = 2\Omega_0^2 y_s$

$\Rightarrow \boxed{y_s = \frac{D}{2}}$

c) Si la partícula se mueve según $(-\hat{j})$

cambia el sentido de la fuerza de Coriolis (hacia la pared) lo que implica que no se separa nunca.

Esto se puede ver en la ecuación (1) $N_x = m(\Omega_0^2 D + 2\Omega_0 \dot{y}) > 0$ siempre